１次元問題の有限要素法

奥 田 洋 司

東京大学大学院　工学系研究科　システム量子工学専攻

１．はじめに

自然科学で対象とする様々な物理現象，例えば，弾性変形，熱伝導，物質輸送，強制/自然対流，などを記述する数学モデルは一般に偏微分方程式で表される。工学上の実際の問題を解析するためには，非常に複雑な境界条件，初期条件のもとでこれらの偏微分方程式を解く必要があり，過去に多くの近似解法が開発されてきた。有限要素法（FEM : Finite Element Method）はそうした近似解法のひとつである。1950年代にその起源となる解法が米国の航空機設計技術者らによって開発され，1960年代後半からは収束性や誤差に関する数学的バックグラウンドが補強されることにより，汎用的な近似解法として適用範囲が大きな広がりを見せた。現在では構造に限らず，熱流体，電磁場，音場など工学上のさまざまな問題に適用されるようになっている。言うまでもないが，有限要素法が計算力学における有力なツールとして普及した背景には計算機環境のめざましい発展がある。

多くの近似解法がそうであるように，有限要素法も，求めるべき解を未定係数を含む関数展開の形に仮定し，それが微分方程式を満足するように未定係数を定めることで近似解を求めている。未定係数を定めるために最終的に解くべき式は，数十万～数百万元の大規模な連立１次方程式となる。ここでは，有限要素法はどのような考え方に基づいて近似を行い，どのように未定係数を定めるための式（一般に「剛性方程式」と呼ばれる）を導出するのか，また，なぜそれが汎用的な解法となるのか，などについて，１次元の簡単な例題を用いて説明する。

２．重み付き残差法と変分法[1][2]

２．１　微分方程式と汎関数

物理現象の多くの問題を解析する際に，考えている対象の系を記述する微分方程式から解を定めるアプローチと，系のある積分量（汎関数）を最小（場合によっては停留）にするような関数を求めるアプローチがある。前者の例としては「重み付き残差法」が挙げられる。重み付き残差法は，微分方程式の残差が解析領域内でできるだけ多くの重み関数と直交するように，すなわち，微分方程式の残差と重み関数との内積がゼロとなるように近似解が求められる。重み関数は解析者が与えるもので，既知の関数である。どのような重み関数をもってきても微分方程式の残差との内積がゼロになるようであれば，それは微分方程式の残差がゼロであることを意味する。したがって解が求められる。後者は変分原理のことであり，変分原理を利用できる例としては弾性問題が挙げられる。弾性問題は，３種類の偏微分方程式（つりあい方程式，ひずみ-変位関係式，応力-ひずみ関係式）と２種類の境界条件（幾何学的境界条件，力学的境界条件）によって記述されるが，これら微分方程式と境界条件はそのままの形では扱わずに，仮

想仕事の原理もしくは最小ポテンシャルエネルギの原理といった汎関数の最小化によって近似解が求められる。

注意しなければならないのは，問題によってはこの汎関数を必ずしも構築できるとは限らないことである。例えば，ストークス問題では汎関数が存在するが，ナヴィェストークス方程式に対応する汎関数は存在しない。

ここで，上のどちらのアプローチを選択するかということと，有限要素法を適用するということは，言葉の上では実は別の問題であること注意しなければならない。例えば，有限要素法と差分法との違いは，解析領域や未知変数をどのように離散化するかの違いを指している。重み付き残差法に基づいて差分法を適用してもよいし，変分法に基づいて差分法を適用してもよいわけである。流れの問題に有限要素法を適用する場合には重み付き残差法を利用するのが一般的であり，次節においては，重み付き残差法について簡単な例題を用いて説明する。なお，そこでは有限要素法の概念はまだ導入されていないことに注意されたい。

2．2　問題の設定

例題として，以下のような1次元問題を考える。

微分方程式：

(1) $$\frac{d^2T}{dx^2} - T = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

境界条件：

(2) $$T = 0 \qquad (x = 0)$$

(3) $$\frac{dT}{dx} = 1 \qquad (x = 1)$$

この問題の厳密解は簡単に求めることができ，次式で与えられる。

(4) $$T = (e^x - e^{-x})/(e + e^{-1})$$

2．3　重み付き残差法

T の近似解 $\tilde{T}$ を以下に示すような関数展開の形に仮定する。

$$(5)\quad \tilde{T}=\sum_{\beta=1}^{M}N_\beta(x)T_\beta$$

ここで，N_β, T_β はそれぞれ既知関数，未定係数であり，M は項数である。N_β は試行関数あるいは形状関数，基底関数などと呼ばれる。未定係数 T_β を定めることによって近似解 $\tilde{T}$ が求まることになる。

さて，ここでは式(2) の境界条件を満足するように試行関数を選ぶことにしよう。すなわち，

$$(6)\quad N_\beta(0)=0 \quad , \quad \beta=1,2,\cdots,M$$

これにより，考慮すべき残りの条件は，式(1) の微分方程式と式(3) の境界条件となる。なお，式(3) も同時に満足するような試行関数を選ぶこともできるが，その場合，選択の範囲が狭くなることになる。式(3) の境界条件については，以下に述べるように，式(1) の微分方程式に対するのと同様，重み付き残差法の近似を適用してしまう。

重み付き残差法では，解析領域内 $(0\leq x\leq 1)$ および境界上 $(x=1)$ における残差の重み付き積分がゼロとなるようにする。領域内および境界上においてそれぞれ M 個の重み関数 $w_\alpha^\Omega, w_\alpha^\Gamma\ (\alpha=1,2,\cdots,M)$ を定義し，残差の重み付き積分を考える。

$$(7)\quad \int_0^1 w_\alpha^\Omega\left(\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2}-\tilde{T}\right)dx+\left[w_\alpha^\Gamma\left(\frac{d\tilde{T}}{dx}-1\right)\right]_{x=1}=0 \quad , \quad \alpha=1,2,\cdots,M$$

式(7) は M 個の式からなり，未知数は $\tilde{T}$ に含まれる M 個の未定係数である。式(7) は，領域内 $(0\leq x\leq 1)$ の残差と境界上 $(x=1)$ の残差を重み付けをして和をとり，それがゼロとなるようにしたものである。重み関数 $w_\alpha^\Omega, w_\alpha^\Gamma$ の選び方は任意であるため，

$$(8)\quad w_\alpha^\Gamma=-w_\alpha^\Omega$$

とし，さらに，式(7) を部分積分することによって次式を得る。

$$(9)\quad \left[w_\alpha^\Omega \frac{d\tilde{T}}{dx}\right]_0^1 + \int_0^1 \left(-\frac{dw_\alpha^\Omega}{dx}\frac{d\tilde{T}}{dx} - w_\alpha^\Omega \tilde{T}\right)dx + \left[-w_\alpha^\Omega\left(\frac{d\tilde{T}}{dx}-1\right)\right]_{x=1} = 0$$

式(9) では微分次数が下がったため，試行関数 N_β に要求される微分可能性の制約が緩められたことになる。また，式(8) のようにおいた理由は後で述べる。

重み関数の選び方によって，重み付き残差法はさらに，部分領域法，選点法，ガラーキン法，モーメント法などに分類される。ここではこれらの中で最もよく用いられるガラーキン法について説明する。

ガラーキン法では，重み関数として T の近似に用いたのと同じ試行関数を用いる。すなわち，式(9) に $w_\alpha^\Omega = N_\alpha$ を代入して，

$$(10)\quad \left[N_\alpha \frac{d\tilde{T}}{dx}\right]_0^1 + \int_0^1 \left(-\frac{dN_\alpha}{dx}\frac{d\tilde{T}}{dx} - N_\alpha \tilde{T}\right)dx + \left[-N_\alpha\left(\frac{d\tilde{T}}{dx}-1\right)\right]_{x=1} = 0$$

式(6) を考慮して整理すると，

$$(11)\quad \int_0^1 \left(\frac{dN_\alpha}{dx}\frac{d\tilde{T}}{dx} + N_\alpha \tilde{T}\right)dx \;=\; N_\alpha(1)$$

ここで，式(3) に関する T の微係数についての境界積分項が消え，演算量が減ったことに注意されたい。このことは2次元，3次元問題においてより効果的となる。さらに，もし式(3) の右辺がゼロの場合には，何もしなくても自然に境界条件が満足されることになる。このような性

質から，式(3) は自然境界条件と呼ばれる。これに対し，式(2) は基本境界条件と呼ばれる。

式(11) に式(5) を代入して次式を得る。

$$(12)\qquad K_{\alpha\beta}T_\beta = f_\alpha$$

ここで

$$(13)\qquad K_{\alpha\beta} = \int_0^1 \left(\frac{dN_\alpha}{dx}\frac{dN_\beta}{dx} + N_\alpha N_\beta \right) dx$$

$$(14)\qquad f_\alpha = N_\alpha(1)$$

である。式(12) がガラーキン法を用いたときの，最終的に解くべき未定係数 T_β についての M 元連立 1 次方程式である。$K_{\alpha\beta}$ は対称行列となっていることに注意されたい。

次に，適当な試行関数を用いて実際に近似解を求める。式(2) の基本境界条件を満足する試行関数として，

$$(15)\qquad N_\beta(x) = x^\beta \quad , \quad \beta = 1, 2, \cdots, M$$

を用いることにしよう。試行関数は 3 項で打ち切ることとし(M=3)，式(15) を式(13),(14)に代入して計算すると，式(12) は次のようになる。

$$(16)\qquad \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{6}{5} \\ \frac{5}{4} & \frac{23}{15} & \frac{5}{3} \\ \frac{6}{5} & \frac{5}{3} & \frac{68}{35} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

これを解いて，

$$(17) \quad T_1 = 0.6505\ ,\ T_2 = -0.01288\ ,\ T_3 = 0.1240$$

すなわち，ガラーキン法による近似解

$$(18) \quad \tilde{T} = 0.6505x - 0.01288x^2 + 0.1240x^3$$

が得られる。これを厳密解の式(4) と比較した結果を表 1 に示す。

表 1　ガラーキン法と厳密解との比較

x	ガラーキン法	厳密解
0.2	0.13058	0.13048
0.4	0.26607	0.26619
0.6	0.41244	0.41259
0.8	0.57563	0.57554
1.0	0.76159	0.76159

3．有限要素法[2-6]

3．1　局所的な試行関数・要素・節点

重み付き残差法あるいは変分法いずれを用いるにせよ，式(5) の形に近似解を仮定した。そこでは，特に意識することなしに，試行関数の定義域は領域全体とされていた。例えば，式(15) の試行関数 x^{β} の定義域は $0 \le x \le 1$ である。

しかしながら，問題が２次元，３次元の場合で，領域が四角形や直方体などのような単純な形状ではなく，一般的な複雑形状の場合，領域全体で定義された試行関数をいくつも準備することは容易ではない。また，求めるべきパラメータ T_β は特に明瞭な物理的意味をもたず，文字通り単なる未定係数である。有限要素法では，以下に述べるように，局所的な領域でのみ値をもつように試行関数を定めることによってこの問題を解決する。そしてこれがまさに，有限要素法が複雑形状を容易に取り扱うことができる理由である。なお，有限要素法では，試行関数よりも形状関数と呼ぶ場合が多いため，以下においては形状関数という言葉を用いることにする。

例題として再び式(1)～(3) を取り上げる。まず，領域 $0 \le x \le 1$ を「要素（element）」と呼ばれる部分領域に分割する。ここでは図１に示すように３要素に等分割する。要素には要素番号がつけられる。次に，各要素ごとに「節点（node）」と呼ばれる点をいくつか定義する。節点の置き方はいろいろ考えられるが，図１の例では，要素の両端に節点を置き，節点は隣り合う要素によって共有されている。節点にも節点番号がつけられるが，節点番号には，領域全体を通しての番号である全体節点番号と，各要素内における局所的な番号である局所節点番号の２種類がある。要素番号-節点番号の関係は次のような配列によって予めテーブル化されている。

NOP(i,e)：全体節点番号　，　e ：要素番号　，　i：局所節点番号

この配列を参照すれば，要素eに含まれる節点の節点番号を知ることができる。

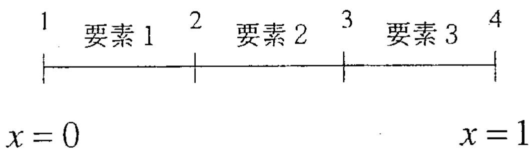

図１　要素分割

有限要素法においても解は式(5) の形を仮定するわけであるが，形状関数および未定係数は各節点について定義する。すなわち，

$$(19)\qquad \tilde{T} = \sum_{\beta=1}^{4} N_\beta T_\beta \qquad \beta：全体節点番号$$

そして，節点 β についての形状関数 N_β は，節点 β において１，その他の節点でゼロの値をと

り，しかも，局所的に定義されている（節点βを含む要素上においてのみゼロでない値をもつ）ように選ぶ。ピラミッド型の関数を用いた例を図２に示す。形状関数がその節点において１の値をとり，局所的に定義されていることから，未定係数T_βは「節点βにおけるTの値」という物理的意味を有することがわかる。図２の関数形を具体的に書き下すと以下のようになる。

$$(20) \qquad N_\beta = \begin{cases} 0 & (x \le x_{\beta-1}) \\ (x - x_{\beta-1})/h & (x_{\beta-1} \le x \le x_\beta) \\ (x_{\beta+1} - x)/h & (x_\beta \le x \le x_{\beta+1}) \\ 0 & (x_{\beta+1} \le x) \end{cases}$$

ここで，hは要素幅，$x_{\beta-1}$,$x_{\beta+1}$は節点座標である。

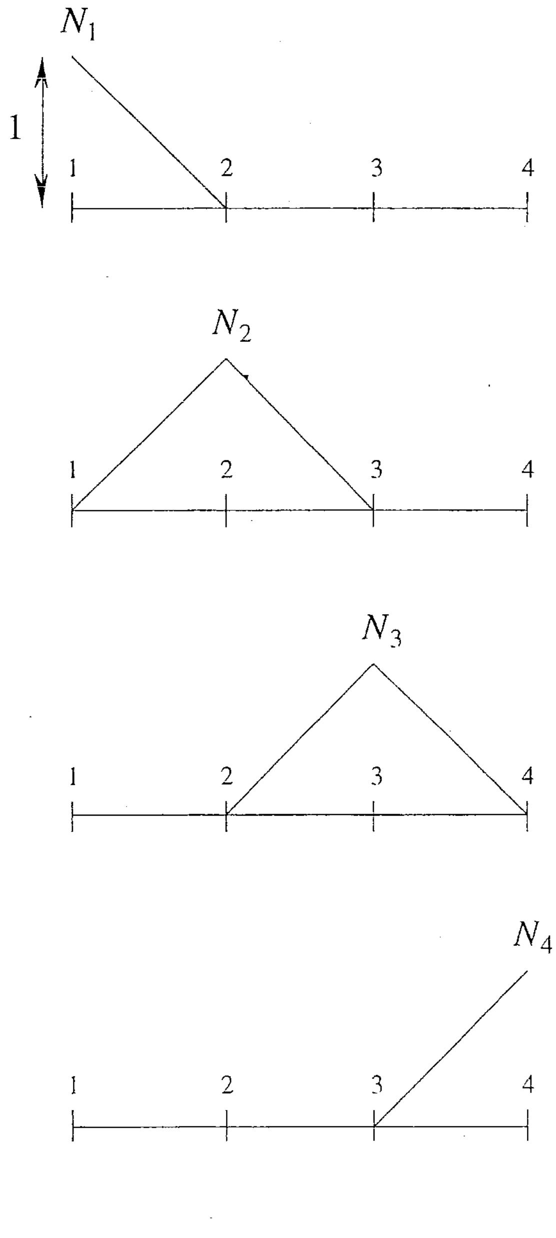

図２　形状関数

では，図３に示すように，ある要素に注目して形状関数の形を見てみよう。形状関数が局所的に定義されていることからも，その要素上でゼロでない値をもつ形状関数は，要素に含まれる２個の節点についての形状関数のみである。要素両端の節点番号を a,b とすると，それら２個の形状関数は以下のように表すことができる。

$$(21)\qquad \begin{cases} N_a = -t+1 \\ N_b = t \end{cases} \qquad (0 \le t \le 1)$$

ここで

$$(22)\qquad t = (x - x_a)/h \qquad (x_a \le x \le x_b)$$

とおいた。

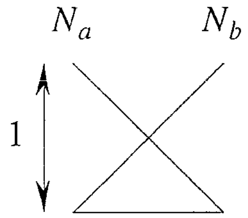

図３　要素形状関数

ここでの例では，領域は３要素，４節点に分割されているので，式(12) の剛性方程式は以下のようになる。

$$(23)\qquad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

ここで，剛性マトリックスの成分（式(13)）$K_{\alpha\beta}$ は，以下のように要素ごとに計算し，全要素についてそれらの寄与の和をとるものとする。

$$(24)\quad K_{\alpha\beta} = \int_0^1 \left(\frac{dN_\alpha}{dx}\frac{dN_\beta}{dx} + N_\alpha N_\beta \right) dx$$

$$= \int_0^{1/3} \left(\frac{dN_\alpha}{dx}\frac{dN_\beta}{dx} + N_\alpha N_\beta \right) dx + \int_{1/3}^{2/3} \left(\frac{dN_\alpha}{dx}\frac{dN_\beta}{dx} + N_\alpha N_\beta \right) dx + \int_{2/3}^{1} \left(\frac{dN_\alpha}{dx}\frac{dN_\beta}{dx} + N_\alpha N_\beta \right) dx$$

要素 1　　　　要素 2　　　　要素 3

形状関数の局所性に注意すると，要素 1 については節点 1 と節点 2 についての形状関数，要素 2 については節点 2 と節点 3 についての形状関数，要素 3 については節点 3 と節点 4 についての形状関数，についてのみ考慮すればよいことが容易にわかる。従って，式(23) を各要素からの寄与に分けて書き直すと，次式のようになる。

$$(25)\quad \left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{要素 1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{要素 2}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ 0 & 0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{bmatrix}}_{\text{要素 3}} \right) \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

ここで，上付き( )内の数字は，寄与している要素番号を表す。

３．２　要素剛性マトリックス

式(25) の剛性マトリックスを見ると，どの要素からの寄与分についても，非ゼロ成分は 2 × 2 の小行列

$$(26)\quad \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix}$$

となっていることがわかる。ここで，a,b は要素両端の節点番号である。式(26) は要素剛性マトリックス呼ばれる。例えば，成分 k_{ab} は式(21) を用いて次式より計算することができる。

$$(27)\quad k_{ab} = \int_{\Omega^e} \left(\frac{dN_a}{dx}\frac{dN_b}{dx} + N_a N_b \right) dx$$

ここで，Ω^e は要素の領域を表す。

式(27) は，以下のように，式(22) で定義された要素内の局所座標系 t において計算する。N_a, N_b の形（式(21)）や積分領域 $(0 \le t \le 1)$ はどの要素でも共通であるため，要素剛性マトリックスの計算はサブルーチン化できることに注意されたい。

$$k_{ab} = \int_0^1 \left(\frac{1}{h^2} \frac{dN_a}{dt} \frac{dN_b}{dt} + N_a N_b \right) h dt \tag{28}$$

本例題の要素剛性マトリックスは次式のように容易に求めることができる。

$$\begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix} \tag{29}$$

一般に，２次元，３次元の問題では，要素剛性マトリックスの積分が上のように解析的に計算できないため，数値積分が用いられる。

３．３　全体剛性マトリックス

式(25) のように各要素の寄与を加え合わせた剛性マトリックスを全体剛性マトリックスと言う。要素剛性マトリックスを全体剛性マトリックスに加え込んでゆくには，要素剛性マトリックスの各成分が全体剛性マトリックスのどの位置に対応するのかを知る必要がある。そのためには，前に説明したテーブルNOPを参照すればよい。

右辺ベクトルについても，剛性マトリックスと同様，各要素からの寄与を加え込むことにより全体右辺ベクトルが組み立てられる。本例題での右辺ベクトルは，$x = 1$ における自然境界条件の寄与として $f_4 = N_4(1)$ を考慮すればよい。

以上の手順で得られる全体剛性方程式を以下に示す。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h} + \frac{h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{2}{h} + \frac{2h}{3} & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} & \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{30}$$

さて，形状関数を式(21)（あるいは式(22)）のように選んだ際，$x=0$における基本境界条件を考慮しなかった。すなわち，式(21)の形状関数は，式(19)があらかじめ$x=0$における基本境界条件を満足するようには選ばれていない。次節で述べるように，これについては，式(30)の連立１次方程式を解く際に考慮する。

３．４　基本境界条件

式(23)に$T_1=\overline{T}$　（$\overline{T}$は既知量）という基本境界条件を考慮するためには以下のような手順をとる。まず，剛性マトリックスにおいて対応する対角成分に１，その対角成分を含む行および列のその他すべての成分に０を代入する。次に，右辺ベクトルにおいて対応する成分に境界条件の値を代入し，その他の成分からは既知であるT_1の寄与を差し引く。すなわち，式(23)を以下のように修正する。

$$
(31)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ 0 & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{T} \\ f_2 - K_{21}\overline{T} \\ f_3 - K_{31}\overline{T} \\ f_4 - K_{41}\overline{T} \end{Bmatrix}
$$

この式を解けば，$T_1=\overline{T}$を満足するような解が得られるのは容易にわかる。基本境界条件が他にもある場合には同様の手続きを繰り返せばよい。式(30)で式(2)を考慮すると次式を得る。

$$
(32)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{h}+\frac{2h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{1}{h}+\frac{h}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}
$$

３．５　剛性方程式の解法

式(32)を解けば節点量T_βが求められる。一般に，有限要素法において剛性マトリックスは大規模な疎行列となる。このような剛性マトリックスの特徴や計算機資源に応じて最適な連立

1 次方程式の解法（ソルバ）を選ぶ必要がある。

連立 1 次方程式の解法には大きく分けて，直接法と反復法がある。直接法は有限回の決まった演算回数で解を求めることができる。しかしながら，マトリックスの成分を記憶するために大きな記憶容量を必要とする。直接法には，ガウスの消去法，分解法などがある。また，非ゼロ成分の配置など行列の構造に着目して効率化を図る手法として，バンドマトリックス法，スカイライン法，サブストラクチャ法，ウェーブフロント法などがある。一方，反復法はある規則に従って繰り返し解を修正しながら収束解を求める方法であり，直接法に比べて記憶容量が少なくて済むが，計算時間は一般に遅い。反復法にはヤコビ法，SOR法，共役勾配法などがある。

3．6　有限要素法による解

式(32) に $h=1/3$ を代入し，ガウスの消去法を用いて解いた結果を以下に示す。両式からはほとんど一致した解が得られ，有効数字 4 桁までを示すと，

$$(33)\qquad T_1 = 0.0000\ ,\ T_2 = 0.2193\ ,\ T_3 = 0.4634\ ,\ T_4 = 0.7600$$

一方，厳密解は式(4) より，

$$(34)\qquad T_1 = 0.0\ ,\ T_2 = 0.2200\ ,\ T_3 = 0.4648\ ,\ T_4 = 0.7616$$

となる。

ここで，式(3) の自然境界条件について検討を加えておこう。基本境界条件は連立 1 次方程式を解く際に（ソルバの数値誤差は別として）厳密に満足させた。これに対し，2 章でも述べたように，自然境界条件は近似的に満足されているに過ぎない。どの程度の精度で満足されているかを以下に示す。

式(19) より $x=1$ における微係数の値を求める。$x=1$ においては，節点 3 および節点 4 の形状関数のみを考慮すればよく，

$$(35)\qquad \frac{d\tilde{T}}{dx} = \sum_{\beta=1}^{4}\frac{dN_\beta}{dx}T_\beta = \frac{dN_3(1)}{dx}T_3 + \frac{dN_4(1)}{dx}T_4 = -\frac{T_3}{h} + \frac{T_4}{h} = 0.8904$$

が得られる。満足すべき境界条件の値は 1 であり，かなり誤差を含んでいると言えるが，要素分割を細かくすることにより 1 に近づくものと期待される。

参考文献

[1] B.A.フィンレイソン著，鷲津久一郎・山本善之・川井忠彦訳，『重み付き残差法と変分原理』，培風館，1974.

[2] O.C.ジェンキェヴィッチ・K.モーガン著，伊理正夫・伊理由美訳，『有限要素と近似』，啓学出版，1984.

[3] 菊地文雄著，『有限要素法概説　ー理工学における基礎と応用ー』，サイエンス社，1980.

[4] 矢川元基・吉村忍著，『有限要素法』，培風館，1991.

[5] O.C.ツェンキーヴィッツ著，吉識雅夫・山田嘉昭監訳，『マトリックス有限要素法　三訂版』，培風館，1984.

[6] 鷲津久一郎・宮本博・山田嘉昭・山本善之・川井忠彦共編，『有限要素法ハンドブック　I 基礎編』，培風館，1981.