

# 超弾性体の u/p 定式化とその検証

東京大学新領域創成科学研究科  
 人間環境学専攻 橋本 学  
 作成日：2012年12月5日

## 1. 超弾性体の境界値問題

超弾性体は、変形やひずみの成分によって微分されると共役な応力成分を生じるような弾性ポテンシャル関数  ${}^t_0W$  が存在する物質として定義される。すなわち、

$$\begin{aligned} {}^t_0\mathbf{S} &= \frac{\partial {}^t_0W}{\partial {}^t_0\mathbf{E}} \\ &= 2 \frac{\partial {}^t_0W}{\partial {}^t_0\mathbf{C}} \end{aligned} \tag{1}$$

と記述される。ただし、左上添え字  $t$  は現時刻の値であることを意味し、左下添え字  $0$  は変形前の状態を基準とすることを意味する。また、 ${}^t_0\mathbf{S}$  は第 2Piola-Kirchhoff 応力テンソル、 ${}^t_0\mathbf{E}$  は Green-Lagrange ひずみテンソル、 ${}^t_0\mathbf{C}$  は右 Cauchy-Green 変形テンソルである。

Fig.1 に示される超弾性体の境界値問題を考える。Fig.1 において、 $N$  を次元数とすると、 ${}^0\Omega \subset \mathbb{R}^N$  は有界領域であり、 $\partial {}^0\Omega$  はその境界である。ここで、左上添え字  $0$  は変形前の状態を意味する。また、 ${}^0\Gamma_d$  は変位境界条件が与えられる境界、 ${}^0\Gamma_t$  は応力境界条件が与えられる境界である。 ${}^0\Gamma_d$  と  ${}^0\Gamma_t$  の間には、 $\partial {}^0\Omega = {}^0\Gamma_d \cup {}^0\Gamma_t$  および  $\phi = {}^0\Gamma_d \cap {}^0\Gamma_t$  の関係が成り立つとする。

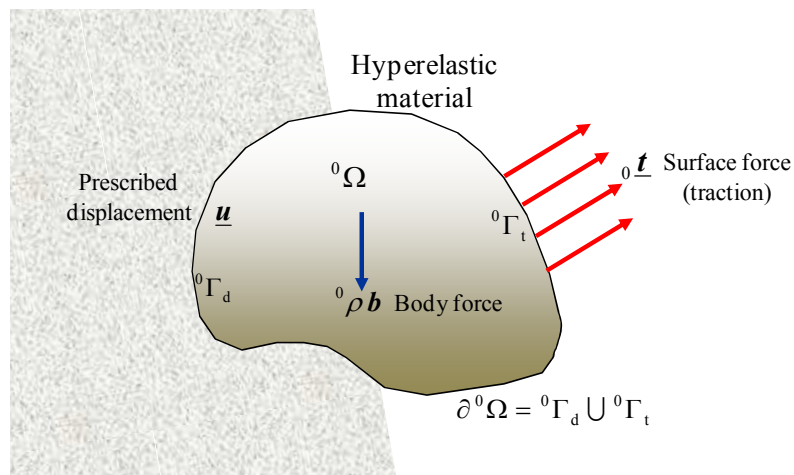


Fig.1 Boundary value problem of hyperelastic material

関数空間  $V = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in H^1({}^0\Omega)^N, \mathbf{v} = \underline{\mathbf{u}} \text{ on } {}^0\Gamma_d\}$  および  $Q = \{q \mid q \in L_2({}^0\Omega)\}$  を考えると, 非圧縮超弾性体の境界値問題は [B] のように記述される.

[B] 以下を満たすような変位と圧力 (不定静水圧) の組  $\{ {}^t\mathbf{u}, {}^t p \} \in V \times Q$  を求めよ.

(平衡方程式)

$${}^0\nabla \cdot ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T) + {}^0\rho \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } {}^0\Omega \quad (2.a)$$

(応力-変形の関係式)

$${}^t\mathbf{S} = -{}^t p {}^0\mathbf{C}^{-1} + 2 \frac{\partial {}^t W}{\partial {}^t\mathbf{C}} \quad (2.b)$$

(変形-変形こう配の関係式)

$${}^t\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F}^T \cdot {}^t\mathbf{F} \quad (2.c)$$

(変形こう配-変位こう配の関係式)

$${}^t\mathbf{F} = \mathbf{I} + ({}^0\nabla \otimes {}^t\mathbf{u})^T \quad (2.d)$$

(非圧縮性の条件式)

$$\begin{aligned} {}^t III_C &= \det {}^t\mathbf{C} \\ &= (\det {}^t\mathbf{F})^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.e)$$

(境界条件式)

$${}^t\mathbf{u} = \underline{\mathbf{u}} \quad \text{on } {}^0\Gamma_d \quad (2.f)$$

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{t} &= {}^0\mathbf{n} \cdot ({}^t\mathbf{S} \cdot {}^t\mathbf{F}^T) \\ &= {}^0\mathbf{t} \quad \text{on } {}^0\Gamma_t \end{aligned} \quad (2.g)$$

ただし, 右上添え字 T はテンソルの転置であることを意味する. また,  ${}^0\nabla$  は物質座標  ${}^0\mathbf{x}$  でのナブラ,  ${}^t\mathbf{F}$  は変形こう配テンソル,  ${}^0\rho$  は変形前の密度,  $\mathbf{b}$  は単位質量当たりの体積力,  $\mathbf{I}$  は恒等テンソル,  ${}^t III_C$  は右 Cauchy-Green 変形テンソルの第 3 不変量,  ${}^0\mathbf{n}$  は変形前の状態の単位法線ベクトルである. 変位  ${}^t\mathbf{u}$  は, 現時刻における物質点の空間座標  ${}^t\mathbf{x}$  を用いて  ${}^t\mathbf{u} = {}^t\mathbf{x} - {}^0\mathbf{x}$  と表わされる.

## 2. Mooney-Rivlin 体

弾性ポテンシャル関数の形として,

$${}^t W = c_{10} ({}^t \tilde{I}_C - 3) + c_{01} ({}^t \tilde{II}_C - 3) \quad (3)$$

がよく用いられ, Mooney-Rivlin 体と呼ばれる. ここで,  ${}^t \tilde{I}_C$  と  ${}^t \tilde{II}_C$  は低減不変量である. 低減不変量は

$${}^t \tilde{I}_C = \text{tr } {}^t \tilde{\mathbf{C}} = \frac{{}^t I_C}{{}^t III_C^{1/3}} \quad (4.a)$$

$${}^t\widetilde{I}_C = \frac{1}{2} \left\{ (\text{tr} {}^t\widetilde{\mathbf{C}})^2 - \text{tr} {}^t\widetilde{\mathbf{C}}^2 \right\} = -\frac{{}^t\mathbb{I}_C}{{}^t\mathbb{I}_C^{2/3}} \quad (4.b)$$

$${}^t\widetilde{I}_C = \det {}^t\widetilde{\mathbf{C}} = 1 \quad (4.c)$$

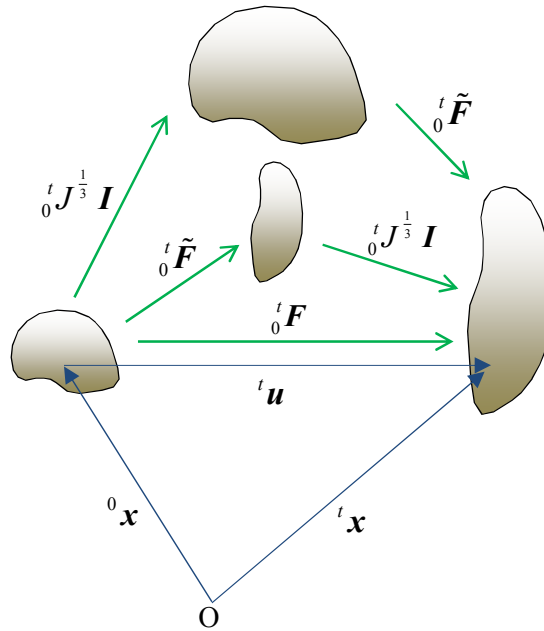
で定義される。ただし、

$${}^t\widetilde{\mathbf{C}} = {}^t\widetilde{\mathbf{F}}^T \cdot {}^t\widetilde{\mathbf{F}} \quad (5)$$

である。 ${}^t\widetilde{\mathbf{F}}$  は Flory の変形こう配テンソルであり、

$${}^t\mathbf{F} = \left\{ (\det {}^t\mathbf{F})^{1/3} \mathbf{I} \right\} \cdot {}^t\widetilde{\mathbf{F}} = {}^t\widetilde{\mathbf{F}} \cdot \left\{ (\det {}^t\mathbf{F})^{1/3} \mathbf{I} \right\} \quad (6)$$

で定義される。式 (6) は、物体の変形が膨張変形と体積変化なしの変形に分解することを意味する (Fig.2 参照)。



**Fig.2** Definition of Flory's deformation gradient tensor

式 (3) を完全 3 次多項式

$$\begin{aligned} {}^tW = & c_{10} ({}^t\widetilde{I}_C - 3) + c_{01} ({}^t\widetilde{I}_C - 3) + c_{11} ({}^t\widetilde{I}_C - 3)({}^t\widetilde{I}_C - 3) \\ & + c_{20} ({}^t\widetilde{I}_C - 3)^2 + c_{02} ({}^t\widetilde{I}_C - 3)^2 \\ & + c_{21} ({}^t\widetilde{I}_C - 3)^2 ({}^t\widetilde{I}_C - 3) + c_{12} ({}^t\widetilde{I}_C - 3)({}^t\widetilde{I}_C - 3)^2 \\ & + c_{30} ({}^t\widetilde{I}_C - 3)^3 + c_{03} ({}^t\widetilde{I}_C - 3)^3 \end{aligned} \quad (7)$$

まで拡張すると、応力-ひずみ線図において高分子材料の硬化特性として知られる S 次カーブを表現できる。

### 3. 超弾性体の u/p 定式化および u/p-c 定式化

変位法に基づく有限要素法は、定式化が簡易であり、多くの問題での有効性がよく知られているため広く用いられている。変位法に基づく有限要素法が有効でない問題が二つ知られている。それらは、非圧縮性物質や微圧縮性物質の構造解析、板やシェルの構造解析である。これらの問題では、混合法に基づく有限要素法 (混合型有限要素法) が有効である [1]~[3]。混合法に基づく有限要素法は、Hu-Washizu の原理の一つであると考えられる。非圧縮性物質および微圧縮性物質の解析に対する混合法に基づく有限要素法は、u/p 定式化および u/p-c 定式化と呼ばれる [4]。

#### 3.1. 非圧縮超弾性体の混合法

次のエネルギー最小問題 [M1] を考える。

[M1] 以下を満たすような変位と Lagrange 未定乗数の組  $\{ {}^t\mathbf{u}, {}^t p^* \} \in V \times Q$  を求めよ。

$$\bar{\Phi}({}^t\mathbf{u}, {}^t p^*) \leq \bar{\Phi}(\mathbf{v}, q^*) \quad \forall \{ \mathbf{v}, q^* \} \in V \times Q \quad (8.a)$$

$$\bar{\Phi}(\mathbf{v}, q^*) = \Phi(\mathbf{v}) + \int_{\Omega} q^* g({}_0III_C(\mathbf{v})) d^0\Omega \quad (8.b)$$

$$\Phi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} {}_0W(\mathbf{v}) d^0\Omega + \int_{\Gamma_1} {}_0\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d^0\Gamma + \int_{\Omega} {}_0\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d^0\Omega \quad (8.c)$$

$$g(1) = 0 \quad (8.d)$$

$$g'({}_0III_C) |_{{}_0III_C=1} = 1 \quad (8.e)$$

ただし、式 (8.d) と式 (8.e) における  $g({}_0III_C)$  は、

$$g({}_0III_C) = {}_0III_C - 1 \quad (9.a)$$

$$g({}_0III_C) = 2({}_0III_C^{1/2} - 1) \quad (9.b)$$

のような関数である。

関数空間  $M = \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u} \in H^1({}^0\Omega)^N, \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ on } {}^0\Gamma_d \}$  を定義すると、 $\mathbf{v} = {}^t\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$  となる  $\delta \mathbf{u} \in M$  が存在する。また、 $q^* = {}^t p^* + \delta p^*$  となる  $\delta p^* \in Q$  も存在する。ここで、変分量

$$\delta \bar{\Phi} = \bar{\Phi}({}^t\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}, {}^t p^* + \delta p^*) - \bar{\Phi}({}^t\mathbf{u}, {}^t p^*) \quad (10)$$

と停留条件

$$\delta \bar{\Phi} = 0 \quad (11)$$

を考えると、

$$\begin{aligned} \delta \bar{\Phi} = & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial {}_0W}{\partial {}_0\mathbf{C}} + {}^t p^* \frac{\partial g({}_0III_C)}{\partial {}_0\mathbf{C}} \right) : \delta {}_0\mathbf{C} d^0\Omega \\ & - \int_{\Gamma_1} {}_0\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} d^0\Gamma - \int_{\Omega} {}_0\rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d^0\Omega + \int_{\Omega} \delta p^* g({}_0III_C) d^0\Omega = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる．よって，エネルギー最小問題 **[M1]** は，以下の仮想仕事の原理 **[V1]** と等価である．

**[V1]** 以下を満たすような変位と Lagrange 未定乗数の組  $\{ {}^t\mathbf{u}, {}^t p^* \} \in \mathbf{V} \times \mathbf{Q}$  を求めよ．

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left( \frac{\partial {}^t W}{\partial {}^t \mathbf{C}} + {}^t p^* \frac{\partial g({}^t III_C)}{\partial {}^t \mathbf{C}} \right) : \delta {}^t \mathbf{C} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_t} {}_0 \underline{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Omega} {}_0 \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{M} \end{aligned} \quad (13.a)$$

$$\int_{\Omega} \delta p^* g({}^t III_C) \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta p^* \in \mathbf{Q} \quad (13.b)$$

$$g(\mathbf{l}) = 0 \quad (13.c)$$

$$g'({}^t III_C) |_{{}^t III_C=1} = 1 \quad (13.d)$$

式 (13.a), 式 (13.b) より

$${}^0 \nabla \cdot \left\{ 2 \left( \frac{\partial {}^t W}{\partial {}^t \mathbf{C}} + {}^t p^* \frac{\partial g({}^t III_C)}{\partial {}^t \mathbf{C}} \right) \cdot {}^t \mathbf{F}^T \right\} + {}^0 \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } {}^0 \Omega \quad (14.a)$$

$${}^0 \mathbf{n} \cdot \left\{ 2 \left( \frac{\partial {}^t W}{\partial {}^t \mathbf{C}} + {}^t p^* \frac{\partial g({}^t III_C)}{\partial {}^t \mathbf{C}} \right) \cdot {}^t \mathbf{F}^T \right\} - {}_0 \underline{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } {}^0 \Gamma_t \quad (14.b)$$

$$g({}^t III_C) = 0 \quad \text{in } {}^0 \Omega \quad (14.c)$$

が得られる．式 (14.c) と式 (13.c) が成り立つので，

$${}^t III_C = 1 \quad \text{in } {}^0 \Omega \quad (15)$$

である．式 (13.d), 式 (14.a), 式 (14.b) より

$${}^0 \nabla \cdot \left\{ 2 \left( \frac{\partial {}^t W}{\partial {}^t \mathbf{C}} + {}^t p^* \mathbf{C}^{-1} \right) \cdot {}^t \mathbf{F}^T \right\} + {}^0 \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } {}^0 \Omega \quad (16.a)$$

$${}^0 \mathbf{n} \cdot \left\{ 2 \left( \frac{\partial {}^t W}{\partial {}^t \mathbf{C}} + {}^t p^* \mathbf{C}^{-1} \right) \cdot {}^t \mathbf{F}^T \right\} - {}_0 \underline{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad \text{on } {}^0 \Gamma_t \quad (16.b)$$

式 (2.a), 式 (2.b), 式 (2.g), 式 (16.a), 式 (16.b) より，Lagrange 未定乗数  ${}^t p^*$  と圧力 (不定静水圧)  ${}^t p$  の間に

$${}^t p^* = -\frac{{}^t p}{2} \quad (17)$$

の関係があるとき，仮想仕事の原理 **[V1]** と境界値問題 **[B1]** は等価である．以上より，式 (17) が成り立つとき，境界値問題 **[B1]**，エネルギー最小問題 **[M1]**，仮想仕事の原理 **[V1]** は等価である．

### 3.2. 微圧縮超弾性体の混合法

ここでは、微小な体積変化をする微圧縮超弾性体を扱う。この場合、次のエネルギー最小問題 [M2] を考える。

[M2] 以下を満たすような変位  ${}^t\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  を求めよ。

$$\Phi({}^t\mathbf{u}) \leq \Phi(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (18.a)$$

$$\Phi(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} {}_0\bar{W}(\mathbf{v}) d^0\Omega + \int_{\Gamma_1} {}_0\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d^0\Gamma + \int_{\Omega} {}_0\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d^0\Omega \quad (18.b)$$

$${}_0\bar{W}(\mathbf{v}) = {}_0W(\mathbf{v}) + \frac{\alpha}{2} \left( g({}_0^tIII_C) \right)^2 \quad (18.c)$$

$$g(\mathbf{1}) = 0 \quad (18.d)$$

$$g'({}_0^tIII_C) \Big|_{{}_0^tIII_C=1} = 1 \quad (18.e)$$

ただし、 $\alpha$  は圧縮性を表すパラメータである。体積弾性率  $\kappa$  を使うと、 $\kappa = 4\alpha$  が成り立つ。式 (18.c) のように、パラメータ  $\alpha$  を使うことによって、超弾性体の弾性ポテンシャル関数  ${}_0W$  は拡張される。ここで、変分量

$$\delta\Phi = \Phi({}^t\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) - \Phi({}^t\mathbf{u}) \quad (19)$$

と停留条件

$$\delta\Phi = 0 \quad (20)$$

を考えると、エネルギー最小問題 [M2] は以下の仮想仕事の原理 [V2] と等価である。

[V2] 以下を満たすような変位  ${}^t\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  を求めよ。

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial {}_0^tW}{\partial {}_0^t\mathbf{C}} + \alpha g({}_0^tIII_C) \frac{\partial g({}_0^tIII_C)}{\partial {}_0^t\mathbf{C}} \right) : \delta {}_0^t\mathbf{C} d^0\Omega \quad (21.a)$$

$$= \int_{\Gamma_1} {}_0\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{u} d^0\Gamma + \int_{\Omega} {}_0\rho \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d^0\Omega \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathbf{M}$$

$$g(\mathbf{1}) = 0 \quad (21.b)$$

$$g'({}_0^tIII_C) \Big|_{{}_0^tIII_C=1} = 1 \quad (21.c)$$

式 (21) を変位法に基づく有限要素で離散化すると、体積ロッキングが生じる。そこで、式 (21.a) における  $\alpha$  を含む項に対して次数低減積分を行うことが多い。この次数低減積分に対応する混合法が存在する。この混合法では、 $\alpha g({}_0^tIII_C)$  を関数空間  $\mathbf{Q}$  への正射影したものが Lagrange 未定乗数  ${}^t\mathbf{p}^*$  であると考えられる。すなわち、

$${}^t\mathbf{p}^* = \alpha g({}_0^tIII_C) \quad (22)$$

と考える。すると、以下の仮想仕事の原理 [V3] が得られる。

[V3] 以下を満たすような変位と Lagrange 未定乗数の組  $\{ {}^t\mathbf{u}, {}^t\mathbf{p}^* \} \in \mathbf{V} \times \mathbf{Q}$  を求めよ.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial {}^tW}{\partial {}^t\mathbf{C}} + {}^t\mathbf{p}^* \frac{\partial g({}^tIII_C)}{\partial {}^t\mathbf{C}} \right) : \delta {}^t\mathbf{C} \, d^0\Omega \quad (23.a)$$

$$= \int_{\Gamma_1} {}^0\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0\Gamma + \int_{\Omega} {}^0\rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d^0\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{M}$$

$$\int_{\Omega} \delta p \left( g({}^tIII_C) - \frac{{}^t p^*}{\alpha} \right) d^0\Omega = 0 \quad \forall \delta p^* \in \mathbf{Q} \quad (23.b)$$

$$g(1) = 0 \quad (23.b)$$

$$g'({}^tIII_C) |_{{}^tIII_C=1} = 1 \quad (23.c)$$

### 3.3. 超弾性体の u/p 定式化

u/p 定式化では、圧力変数が各要素に属している (Fig.3 参照). 微圧縮性物質の構造解析では、要素ごとの剛性マトリックスをアセンブルする前に、各要素の圧力変数に対して静的縮約が行われる. この定式化では、要素間において圧力の連続性は課せられない. そのため、詳細なメッシュを用いた有限要素解析がよく行われる.

本報告書では、式 (23) から得られる u/p 定式化を構造解析ソフト FrontISTR に実装する.

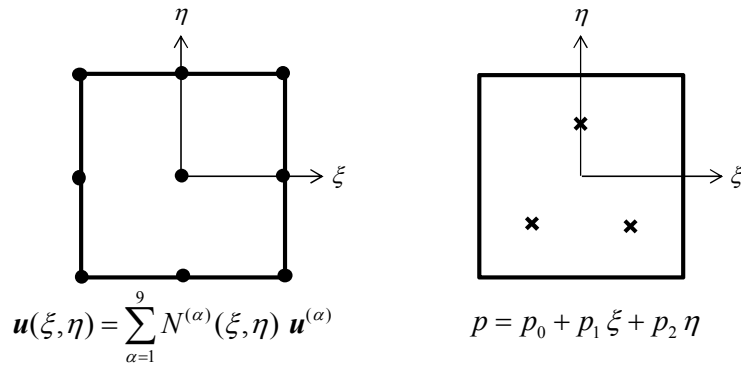


Fig.3 (Example) 9/3 element in 2D

### 3.4. 超弾性体の u/p-c 定式化

u/p-c 定式化の文字「c」は、要素間で圧力変数が連続である (continuous) ことを意味する. u/p-c 定式化では、節点での圧直変数は隣接した要素に属し、要素内の圧力はその圧力変数によって補間される (Fig.4 参照). そのため、要素ごとの剛性マトリックスをアセンブルする前に、圧力変数に対して静的縮約を行うことはできない.

本報告書では、u/p-c 定式化は構造解析ソフト FrontISTR に実装されない。

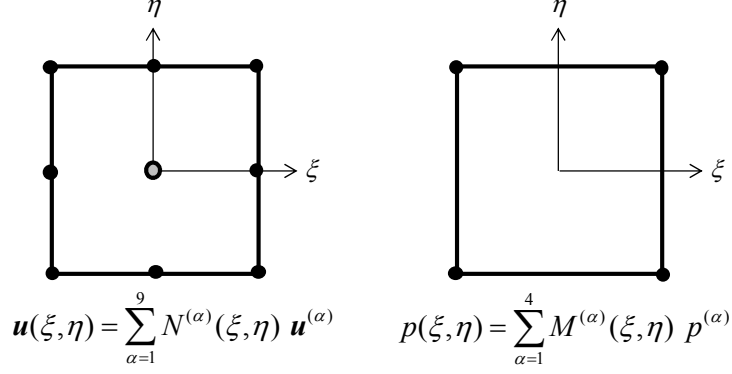


Fig.4 (Example) 9/4-c element in 2D

## 4. FrontISTR への u/p 定式化の実装

### 4.1. 実装するための方針

u/p 定式化では、以下に示される連立一次方程式が各要素 ( $e$ ) に対して得られる。

$$\begin{pmatrix} {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{uu}^{(e)} & {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{up}^{(e)} \\ {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pu}^{(e)} & {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pp}^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{(m)}\Delta\mathbf{u}^{(e)} \\ {}^{(m)}\Delta\mathbf{p}^{(e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^{(m-1)}\mathbf{q}_u^{(e)} \\ {}^{(m-1)}\mathbf{q}_p^{(e)} \end{pmatrix} \quad (24)$$

ここで、 $t + \Delta t$  は次時刻を意味し、 $(m)$  は Newton-Raphson 法の反復数を意味する。要素ごとの剛性マトリックスをアセンブルすると、系全体の連立一次方程式が

$$\begin{pmatrix} {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{uu} & {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{up} \\ {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pu} & {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{(m)}\Delta\mathbf{u} \\ {}^{(m)}\Delta\mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}^{(m-1)}\mathbf{q}_u \\ {}^{(m-1)}\mathbf{q}_p \end{pmatrix} \quad (25)$$

のように得られる。圧力変数  $p$  は要素間で不連続であるので、式 (19) に静的縮約を行うと、

$${}^{(m-1)}\mathbf{K}^{(e)} \Delta\mathbf{u}^{(e)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(e)} - {}^{(m-1)}\mathbf{q}^{(e)} \quad (26.a)$$

$${}^{(m)}\Delta\mathbf{p}^{(e)} = {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pp}^{(e)-1} (- {}^{(m)}\mathbf{q}_p^{(e)} - {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pu}^{(e)} {}^{(m)}\Delta\mathbf{u}^{(e)}) \quad (26.b)$$

が得られる。ただし、

$${}^{(m-1)}\mathbf{K}^{(e)} = {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{uu}^{(e)} - {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{up}^{(e)} {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pp}^{(e)-1} {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pu}^{(e)} \quad (27.a)$$

$${}^{(m-1)}\mathbf{q}^{(e)} = {}^{(m-1)}\mathbf{q}_u^{(e)} - {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{up}^{(e)} {}^{(m-1)}\mathbf{K}_{pp}^{(e)-1} {}^{(m)}\mathbf{q}_p^{(e)} \quad (27.b)$$

である。式 (26.a) において剛性マトリックスをアセンブルすると、系全体の連立一次方程式が



$${}^{(m-1)}\mathbf{K} {}^{(m)}\Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f} - {}^{(m-1)}\mathbf{q} \quad (28)$$

のように得られる. 式 (28) を解き, 得られた  ${}^{(m)}\Delta\mathbf{u}$  を用いて式 (26.b) から  ${}^{(m)}\Delta\mathbf{p}^{(e)}$  を求める. 静的縮約を行うことによって, 解くべき連立一次方程式のサイズが小さくなる. また, LU 分解においてピボットが小さくなるのを回避できる.

変位  $\mathbf{u}$  と圧力  $p$  を持つ要素 (Fig.5 に示される 8/1 要素) を FrontISTR に実装する. FrontISTR のプログラムに追加するプログラムは, 接線剛性マトリックスの追加部分, 内力の追加部分, 圧力増分の算出部分である (Fig.6 参照). このとき, 下位プログラムの再利用やプログラム構造の統一化を意識する. また, FrontISTR のデータ入出力部分の変化は最小限にする.

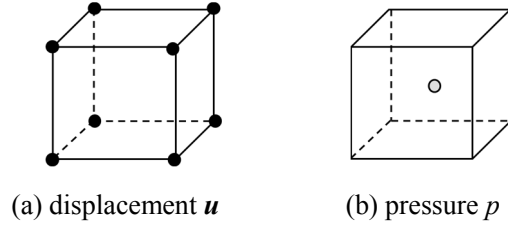


Fig.5 8/1 element ( $\mathbf{u}$ : 8 nodes,  $p$ : 1 node)

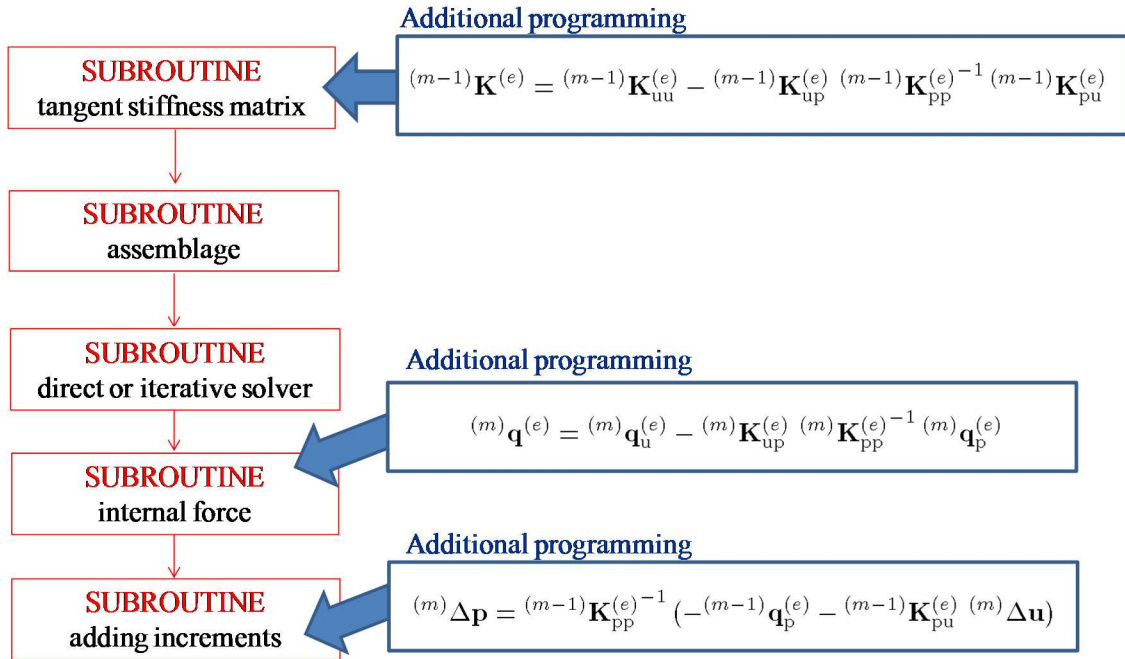


Fig.6 Additional programming in FrontISTR

圧力の更新プログラムを追加するとき，FrontISTR のプログラム内の配列 fstrSOLID%unode(i) : 変位  ${}^t\mathbf{u}$ ，現時刻からの変位増分 fstrSOLID%dunode(i) :  ${}^{(m)}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}$ ，各反復の変位増分 hecMAT%X(i) :  ${}^{(m)}\Delta\mathbf{u} = {}^{(m+1)}\mathbf{u} - {}^{(m)}\mathbf{u}$  が更新される場所に注意する (Fig.7 参照). ただし， $(m)$  は Newton-Raphson 法の反復回数である.

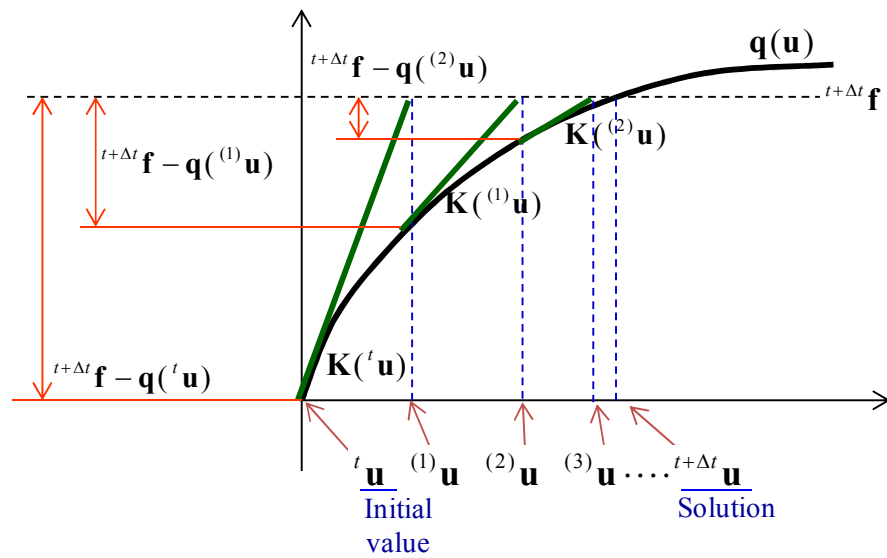


Fig.7 Newton-Raphson iteration